Universidade de Brasília
Departamento de Economia
Disciplina: Métodos Matemáticos em Ciências Sociais Avançadas
Professor: Carlos Alberto
Período: 2/07
Primeira Prova

Questões

1.) Resolva a seguinte equação em diferenças de primeira ordem:

$$y_{t+1}(2+3y_t) = 4\, y_t \quad ; y_0 = ½$$

(dica: imagine uma função auxiliar $g_t = 1/\, y_t$)

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: trabalhando a equação em diferenças anterior temos que:

$$2\,(\, y_{t+1} \,/\, y_t\,) + 3\,(\,1\,/\, y_{t+1}\,) = 4$$

Fazendo que $g_t = 1/\, y_t$ temos que: $g_{t+1} = 0.5\, g_t + 0.75$

Lembrando a condição inicial (y_0 = ½ ou seja que g_t = 2), temos que a resolução da equação anterior é:

$$g_t = (0.5)^{t+1} + 1.5 \text{ e } y_t = ((0.5)\, t+1 + 1.5)^{-1}$$

2. Imagine o seguinte modelo de reajuste de preços e salários:

$$(1) \qquad \frac{w_{t+2} - w_{t+1}}{w_{t+1}} = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t}$$

$$(2) \qquad P_t = á + â\, w_t$$

Suponha que o valor inicial seja : $w_1/P_0 = c$ (uma constante qualquer)

Resolva a equação em diferenças de primeira ordem para w_t , assuma que câ 0 e supondo que |câ| <1 analise a trajetória temporal de w_t .

(Dica: a parte um pouco complicada é construir a equação em diferenças. Lembre que w_1/P_0 = c e trabalhe para encontrar uma expressão que contenha essa igualdade)

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: primeiro podemos encontrar:

$$\frac{w_{t+2}}{\hat{a}\ w_{t+1} + \acute{a}} = \frac{w_{t+1}}{\hat{a}\ w_t + \acute{a}}$$

Depois, lembrando que w_1/P_0 = c, podemos encontrar a equação em diferenças:

$$w_{t+1} = c\ \hat{a}\ w_{t+1} + c\ \acute{a}$$

cuja solução é :

$$w_t = (c\ \hat{a})^t\ (w_0 - c\ \acute{a} / 1 - c\ \hat{a}) + c\ \acute{a} / 1 - c\ \hat{a}$$

que é convergente uma vez que $|c\ \hat{a}| < 1$.

3. Imaginemos que tenhamos o seguinte modelo de formação de preços :

(1) Qd = a – b Pt ; a > 0 ; b > 0 (Função de Demanda)

(2) Qs = c Pt – d c > 0 ; d > 0 (Função de Oferta)

Suponhamos, agora, que expressamos o ajuste de preços diante de excessos de demanda de duas formas:

(3) P’ = á (Qd – Qs); á > 0

(4) Pt+1 – Pt = á (Qd – Qs)

(O á nas equações (3) e (4) é o mesmo)

No caso de (3) temos uma equação diferencial e no caso de (4) temos uma equação em diferença. Resolva ambas e compare os resultados (indique o que diferencia um resultado de outro).

(Esta questão vale três pontos)

Resposta: o preço de equilíbrio será $P^e = a + d / b + c$. Os resultados serão:

Equação Diferencial: $P(t) = P^e + (P_0 - P^e)\, e^{-á\,(b+c)\,t}$ e tenderá sempre para o equilíbrio;

Equação em Diferenças: $P(t) = Pe + (P_0 - P^e)\,(1 - (b+c)\,á)^t$ e neste caso convergência ou divergência ao equilíbrio dependerá do valor (1- (b+c) á) e só se á < 1/(b+c) teremos ajustamento sem oscilações e o equilíbrio pode ser qualificado como estável.

4. No Modelo de Solow, a evolução da economia está dada pela seguinte equação diferencial:

$$k' = s\, f(k) - (a+b)\, k$$

onde a e b são parâmetros ("a" é a taxa de crescimento da população e "b" a taxa de depreciação do capital). A variável "k" é o capital per-cápita e "f" a função de produção do capital per capita e "s" a propensão marginal a poupar. Imagine que o valor dos parâmetros seja: s = 0.4; a = 0.05 e b = 0.15. Outra hipótese do modelo é que $f(0) = 0$ e $f(k) = k^{0.5}$

Determine o valor de k de equilíbrio, desenhe o diagrama de fase e caracterize o equilíbrio.

(Esta questão vale três pontos)

Resposta: o valor de equilíbrio é 4 e o equilíbrio é estável.